Решение задачи квадратичного программирования

Квадратичной формой $\mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от *n* неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных.

Обозначая коэффициент при x_i^2 через a_{ii}, а при произведении $x_i x_j = x_j x_i \ (i \neq j)$ – через $a_{ij} + a_{ji} (a_{ij} = a_{ji})$, квадратичную форму **Q** можно представить в виде

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 +$$

$$+ a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j.$$

Симметричная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется **матрицей квадратичной формы Q**.

Пример. Написать матрицу квадратичной формы

$$\mathbf{Q}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Здесь $a_{11} = 2,\ a_{22} = -5,\ a_{33} = 8,\ a_{12} = a_{21} = 2,\ a_{13} = a_{31} = -1,\ a_{23} = a_{32} = 3.$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

В векторно-матричной форме квадратичная форма имеет вид

$\mathbf{Q}(\bar{x}) = \bar{x}^T \mathrm{A}\, \bar{x}$, где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

Если в квадратичной форме $\mathbf{Q}=\bar{x}^T\mathbf{A}\bar{x}$ неизвестные подвергнуть линейному преобразованию $\bar{x}=\mathbf{S}\bar{y}$, где $\bar{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$,

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \to \mathbf{S}=(s_{ik})$$

получится квадратичная форма $\mathbf{Q}=\bar{y}^T(\mathbf{S}^T\mathbf{AS})\bar{y}$ с матрицей $\mathbf{S}^T\mathbf{AS}$. Матрица **S** называется **матрицей линейного преобразования неизвестных**. Если **S** – невырожденная матрица, то линейное преобразование неизвестных также называется невырожденным.

Рангом квадратичной формы $\mathbf{Q}=\bar{x}^T\mathbf{A}\bar{x}$ называется ранг матрицы **A**. Ранг квадратичной формы не изменяется при невырожденных преобразованиях неизвестных.

Для каждой квадратичной формы $\mathbf{Q}=\bar{x}^T\mathbf{A}\bar{x}$ можно подобрать такое линейное преобразование неизвестных $\bar{x}=\mathbf{S}\bar{y}$ с ортогональной матрицей **S** (квадратная матрица **S** называется **ортогональной**, если $\mathbf{S}^T=\mathbf{S}^{-1}$), что матрица квадратичной формы $\mathbf{Q}=\bar{y}^T(\mathbf{S}^T\mathbf{AS})\bar{y}$ будет диагональной, т. е. квадратичная форма приводится к сумме квадратов

$$\mathbf{Q}=\bar{y}^T(\mathbf{S}^T\mathbf{AS})\bar{y}=y_1^2+y_2^2+\dots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\dots-y_{p+q}^2. \quad (8.1)$$

Закон инерции квадратичных форм. Приводя квадратичную форму к сумме квадратов разными способами, мы будем получать в формуле (8.1) разные коэффициенты. Однако существует следующее важное обстоятельство (закон инерции квадратичных форм): если квадратичная форма приводится к сумме квадратов в двух разных базисах, то число членов с положительными коэффициентами, так же как и число членов с отрицательными коэффициентами, в обоих случаях одно и то же. Легко увидеть, что сумма $p+q$ равна рангу r квадратичной формы $\bar{x}^T\mathbf{A}\bar{x}$. Разность $p-q$ называется **сигнатурой** квадратичной формы $\bar{x}^T\mathbf{A}\bar{x}$.

Квадратичная форма $\mathbf{Q}=\bar{x}^T\mathbf{A}\bar{x}$ называется:

1) **положительно(отрицательно)-определенной**, если для любого ненулевого $\bar{x}$ выполняется неравенство $\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x} > 0$ ($\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x} < 0$);

2) **знакопеременной**, если существуют такие $\bar{x}$ и $\bar{y}$, что $\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x} > 0$ $\bar{y}^T \mathbf{A} \bar{y} < 0$;

3) **положительно(отрицательно)-полуопределенной,** или **квазизнакоопределенной**, если для всех $\bar{x}$ $\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x} \geq 0$ ($\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x} \leq 0$), но имеется отличный от нуля вектор $\bar{x}$, для которого $\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x} = 0$.

Ясно, что положительно-определенная квадратичная форма приводится к сумме квадратов с положительными коэффициентами, а положительно-полуопределенная форма – с неотрицательными коэффициентами. Важным условием положительной определенности квадратичной формы является следующий критерий (**критерий Сильвестра**).

Для того чтобы квадратичная форма $\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x}$ была положительно-определенной, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные, или угловые, миноры

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Теперь нетрудно найти и условия отрицательной определенности квадратичной формы. Для того чтобы квадратичная форма $\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x}$ была отрицательно-определенной необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры нечетного порядка были отрицательны, а все главные миноры четного порядка – положительны.

Теорема 8.1. *Квадратичная форма* $\bar{x}^T \mathbf{A} \bar{x}$ *положительно (отрицательно) определена тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы* **A** *положительны* (*отрицательны*).

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

ПРИВЕДЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Пусть $(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n)$ – базис линейного пространства L, по отношению к которому квадратичная форма представляется в виде

$$\overline{x}^T \mathbf{A} \overline{x} = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2 + \ldots + \lambda_n \eta_n^2. \qquad (8.2)$$

Выражение (8.2) называется **каноническим видом** квадратичной формы.

Так как каждому преобразованию базиса отвечает невырожденное линейное преобразование координат, а невырожденному преобразованию координат – преобразование базиса, то вопрос о приведении квадратичной формы к каноническому виду можно решать путем выбора соответствующего невырожденного преобразования координат.

Теорема 8.2 (метод Лагранжа). *Любая квадратичная форма* $\overline{x}^T \mathbf{A} \overline{x}$*, заданная в n-мерном линейном пространстве L, с помощью невырожденного линейного преобразования координат может быть приведена к каноническому виду* (8.2).

Основная идея этого метода заключается в последовательном дополнении квадратного трехчлена по каждому аргументу до полного квадрата.

Теорема 8.3. *В евклидовом пространстве U существует такой ортонормированный базис* $\{\overline{e}_k\}$ *и можно указать такие вещественные числа* $\{\lambda_k\}$*, что для любого* $\overline{x}$ *из U квадратичная форма* $\overline{x}^T \mathbf{A} \overline{x}$ *может быть представлена в виде* (8.2).

Для матрицы **A** можно указать ортонормированный базис $\{\overline{e}_k\}$ из собственных векторов матрицы **A**. Пусть $\{\lambda_k\}$ – собственные значения, отвечающие $\{\overline{e}_k\}$. Тогда $\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \overline{e}_k$ и $\mathbf{A}\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k \overline{e}_k$ и вследствие ортонормированности базиса $\{\overline{e}_k\}$ $\overline{x}^T \mathbf{A} \overline{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k^2$.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду можно использовать для приведения к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка.

Пример

ПРИМЕР

Привести к каноническому виду уравнение линии

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 20 = 0.$$

1. *Метод Лагранжа*:

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 17 \cdot \left(x^2 + \frac{12xy}{17} \right) + 8y^2 = 17 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{6}{17} xy + \frac{36}{289} y^2 \right) -$$

$$- \frac{36}{17} y^2 + 8y^2 = 17 \cdot \left(x + \frac{6}{17} y \right)^2 + \frac{100}{17} y^2.$$

$$\eta_1 = x + \frac{6}{17} y \quad \left(x = \eta_1 - \frac{6}{17} \eta_2 \right), \qquad \eta_2 = 0 \cdot x + y \quad \left(y = 0 \cdot \eta_1 + \eta_2 \right).$$

Таким образом,

$$17\eta_1^2 + \frac{100}{17} \eta_2^2 - 20 = 0, \qquad \frac{\eta_1^2}{\frac{20}{17}} + \frac{\eta_2^2}{\frac{17}{5}} = 1$$ (эллипс).

2. $17x^2 + 12xy + 8y^2$.

Матрица квадратичной формы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\left| \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} \right| = \begin{vmatrix} 17 - \lambda & 6 \\ 6 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0, \;\; \lambda_1 = 5, \;\; \lambda_2 = 20.$$

$$5\eta_1^2 + 20\eta_2^2 - 20 = 0, \qquad \frac{\eta_1^2}{4} + \frac{\eta_2^2}{1} = 1$$ (эллипс).

Можно указать и базис, в котором уравнение эллипса принимает канонический вид. Его легко получить исходя из собственных векторов линейного преобразования с матрицей **A:** собственные векторы - $\bar{u} = (1; -2)u_1, \; \bar{v} = (2; 1)v_2, \; |\bar{u}| = \sqrt{5}|u_1|, |\bar{v}| = \sqrt{5}|v_2|;$.

$$\bar{e}_1 = (1; 0), \; \bar{e}_2 = (0; 1); \;\; \bar{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}} \right), \;\; \bar{e}_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

$$\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{e}_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{e}_2, \;\; \bar{e}_2' = \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \bar{e}_2;$$

Базис $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ и есть искомый ортонормированный базис, в котором данное уравнение принимает канонический вид. Можно записать и формулы преобразования координат. Сравнивая с формулой $x' = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y \quad \bar{e}' = \cos\alpha \cdot \bar{e}_1' + \sin\alpha \cdot \bar{e}_2'$, заключаем, что $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Следовательно

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}\eta_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\eta_2, \quad y = -\frac{2}{\sqrt{5}}\eta_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\eta_2.$$